

Title	積分方程式ノ抽象的考察ニ就テ
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 76 p.8-p.16
Issue Date	1936-01-31
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74256">https://doi.org/10.18910/74256</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

### 333. 積分方程式ノ抽象的考察ニ就テ

南 雲 道 夫 (阪大)

〔1〕 最近福原氏が非常ニ範圍ノ廣イ領域ニ於ケル函数方程式ノ理論ヲ抽象的ニ方法ヲ建設スルコトニ努力シテ居ラレル。ソノ特別ニ場合トシテ自然 *Fredholm* ノ積分方程式ノ抽象的考察ヲモ論ジテ居ラレル。

只福原氏ノハ規模がアマリニ大キイタメニカヘツテ特殊ニ問題ニハ、スラスラ行カヌコトガアル。然シ福原氏ハソノ過去ノ行キ方ヲ見ルニ如何ナル大難題デモ少シモ *hekiiki* セズ孤軍奮闘ノ後遂ニ之ヲ克服セラレルノが常デアル。ソノ点小生ノ如クイツモ一寸シタ思ヒ付キニノミ興味ヲ持ツテ難題ヲ回避シテキルノハ才恥カシイ次第デアル。

福原氏が最近抽象的ニ積分方程式 (第二種) ヲ論ゼラレタノト同ジ問題ヲ F. Riesz が 1918 年 *Acta Math.* 41 (71 頁 — 98 頁) ニ論ツテ大体ニ充分ニ結果ヲ得テキル、此ノコトハ平素無精デ文献ニ暗イ小生が近頃北川 敏男 君カラ教ヘラレタ。1918 年トイヘバ、カノ世界大戰ノ終リデアル。ノミナラズ F. Riesz が此ノ論文ヲ書イタノが 1916 年一月十九日デアルカラ既ニ滿二十年ヲ過ヤテキル。論文ノ表題ハ *Über lineare Funktionalgleichungen* デアル。福原君ハ恐ラク此ノ論文ヲ御存知ナク、全ク独立ニ見地カラ同ジ問題ヲ論ゼラレタモノト思ハレル。次ニ Riesz ノ得

多重結論ヲ簡單ニ述ベテ、ソレニ小生ノ考察ヲ蛇足的ニ付  
ケ加ヘテ見ヨク。

[2] 任意ノ函数  $f(x)$  [連続或ハ自乗積分可能ノ如キ]  
ニ對スル線狀運算 (或ハ線狀変換)

$$Af = \int K(x, y) f(y) dy$$

ナル記号ヲ用ヒレバ、Fredholmノ第二種積分方程式

$$\varphi(x) - \int K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

$$\text{ハ} \quad (E - A)\varphi = f \quad [Ef = f \text{ トス}]$$

ナル記号ヲ表ハサレル。

今函数  $f(x)$  ヲ抽象的ニ点 (要素) トスル線狀空間 ( $\mathcal{R}$  一次結合及ビ大サ [絶対値  $|f|$ ] ノ定義サレタ空間、之ヲ *normierter linearer metrischer Raum* 或ハ *Banach* 空間ト云フ)) ヲ  $\mathcal{R}$  トスレバ  $\varphi \in \mathcal{R}, f \in \mathcal{R}$ ,  $E$  ハ  $\mathcal{R}$  ニ於ケル不変ノ変換, ( $f$  ヲ  $f$  自身ヘ移ス)  $A$  ハ *vollstetig* ナ線狀変換 ( $\mathcal{R}$  有界ノ集合ヲ緊ツタ (*kompakt* ナ) 集合ニ移ス線狀変換)) デアル。Riesz ハカクテ一般  
的ニ線狀空間  $\mathcal{R}$  ニ於ケル抽象的ニ方程式 ( $A$  ハ *linear vollstetig*,  $E$  ハ *Einheit*)

$$(E - A)\varphi = f$$

ヲ論ジテ次ノ重要ノ結果ヲ得タ。

(1)  $(E - A)\varphi = 0$  ナル方程式ノ解  $\varphi$  ハ高々有限次元ノ線狀集合 (*lineare Mannigfaltigkeit*) ヲ

ナス。

(2)  $(E-A)\varphi = g$  が任意の  $g$  に対して常 = 解  $\varphi$  有  
スレバ、ソノ解ハ一義的 = 決定スル。〔從ツテ (1) ノ解ハ  
 $\varphi = 0$  = カヤル〕

(3)  $(E-A)$  ノ逆ノ運算  $(E-A)^{-1}$  が存在スルカ、然  
ラザレバ  $(E-A)\varphi = 0$  ハ  $\varphi \neq 0$  ナル解ヲ有ス。〔 $(E-A)^{-1}$   
ハ線状有界!〕。

(4)  $(E-\lambda A)\varphi = 0$  が  $\varphi \neq 0$  ナル解ヲ有スルトキノ  
複素数  $\lambda$  ヲ Eigenwert ト呼ブ。シカラバ Eigenwert  
ハ有限ノ集積値ヲ持タナイ。

以上ノ重要ノ諸定理ノ証明ノ簡單ナ Sudimiti ヲ紹介  
スルコトハ極メテ興味アルコトデアルが、今之レヲ省略シテ  
只次ノ Lemma が基礎的ノ役目ヲ演ヅテ居ルコトヲ注意シ  
テ置ク。(要ハ Lemma ヲ巧 = 運用スレ = アル)。又超限  
的方法 (transfinit number) ヲ用ヒナイデス。

Lemma  $\mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2$  ナル  $\mathcal{R}$  内ノ線状集合 (閉集  
合) デ  $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$  ナラバ  $f \in \mathcal{L}_2$  ナル總テノ  $f$  = ツイテ

$$g \in \mathcal{L}_1, \quad g \notin \mathcal{L}_2 \quad |g| = 1$$

$$|g-f| \geq 1-\varepsilon \quad (\varepsilon \text{ 任意、例へば } \frac{1}{2})$$

ナル一定ノ  $g$  が存在スル。

(註) 空間  $\mathcal{R}$  = ハ inner product が定義サレテナイ  
カラ垂直ナル概念ハナイ。然シ上ノ Lemma ハ或ル意味 =  
於イテ  $g$  が  $\mathcal{L}_2$  = 殆ンド垂直ナルコトヲ示ス!  $\mathcal{L}_2$  が有限次

元ナラバ  $\varepsilon=0$  = 出来ル。

尚上ノ Lemma カラ次ノ 著シイ 定理ガ導カレル。

**Riesz ノ 定理**  $\mathcal{R}$  ノ 有界ナ部分 ( $x \in \mathcal{R}, |x| \leq 1$  ナル  $x$  ノ 全体) ガ緊ツテキル (*kompakt*) 時ニハ,  $\mathcal{R}$  ハ 有限次元デアル!

[3] 次ニ Riesz ノ 得々結果ヲ基ニシテ之レニ蛇足ヲ加ヘテ見ヨウ。

(3) = ヨリ  $(E - \lambda A)g = 0$  ノ 固有値 (孤立シテキル) 以外ノ  $\lambda$  = ツイテハ有界ナ  $(E - \lambda A)^{-1}$  ガアル。所ガ

$$(E - \lambda A)^{-1} = E - \lambda R_\lambda \quad (\lambda \neq \text{固有値})$$

トスレバ  $R_\lambda$  ハ *vollstetig* ナ Operator デ且ツ  $\lambda$  ノ 函数トシテ 固有値以外デハ 正則 ( $\lambda$  ハ 複素数) デアル。

$R_\lambda$  ガ *vollstetig* ナコトハ次ノ様ニシテキル。

先ツ有界ナ linear Operator  $T$  = ツキ

$$\|T\| = \frac{|Tx|}{|x|} \text{ ノ 上限}$$

= ヨツテ  $T$  ノ 絶対値ナルモノヲ定義スル。シカラバ

$\|T - E\| < 1$  ノ 時

$$T^{-1} = E + \sum_{n=1}^{\infty} (E - T)^n.$$

従ツテ  $T = E + V$ ,  $V$  *vollstetig* ナル時ハ  $\|V\| < 1$  ナルトキ  $(E + V)^{-1} = E + V^*$ ,  $V^*$  *vollstetig* トナル。

次ニ  $A$  カラ生ズル開ヂケ環 ( $E, A$  ノ 多項式 及ビ  $\|T\|$

$\text{+ } \text{Metric} = \text{ヨルソノ極限ノ全体}$ ヲ  $\mathcal{O}$  トスレバ,  
 $(E - \lambda A)^{-1}$  ハ  $\lambda$  ノ固有値 (孤立点) ヲ避ケタ道ニ沿フヲ  
 進ムコトニヨリ,  $E$  カラ順次ニ解折接続ト同様ニ考ヘ方ニ  
 ヨリ,  $(E - \lambda A)^{-1} \in \mathcal{O}$  ( $\lambda$  非固有値) が証明サレル。故  
 $= (E - \lambda A)^{-1} = E - \lambda R_\lambda$ ,  $R_\lambda$  *vollstetig* が証明出  
 来ル。

又一般ニ  $T_\lambda$  が  $\lambda = \lambda_0$  テ正則デ  $T_{\lambda_0}^{-1}$  が存在 (有界)  
 ナラバ,  $T_\lambda^{-1}$  ハ  $\lambda_0$  ニ近テ正則トナル。

$$(T_\lambda^{-1} = T_{\lambda_0}^{-1} \left\{ E + \sum_{n=1}^{\infty} (E - T_{\lambda_0}^{-1} T_\lambda)^n \right\} = \text{ヨル}).$$

従ツテ固有値以外デハ  $R_\lambda$  正則ヲ得ル。

(註)  $\lambda_0$  デ  $T_\lambda$  が複素数  $\lambda$  ノ正則函数トハ,  $\lambda$  ニ關スル  
 微係数。

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{T_{\lambda+\Delta\lambda} - T_\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{dT_\lambda}{d\lambda}$$

が  $\lambda_0$  ノ近傍デ常ニ存在スルコトヲ云フ。之レニツイテハ  
*Cauchy* ノ積分定理, 積分表示, *Goursat* ノ定理,  
*Taylor* 展開等がスベテ通常ノ正則函数ト同様ニ成立スル,  
 特ニ  $\lambda = \lambda_0$  が孤立特異点ナラバ *Laurent* ノ展開

$$T_\lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (\lambda - \lambda_0)^n \quad (0 < |\lambda - \lambda_0| < R \text{ 収斂})$$

が成立スル。但シ

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{T_\lambda d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}.$$

[4] 積分方程式=関スル古典的良書、一ツ *Lalesco* 著  
*Introduction a la théorie des équations*  
*integrales*. (1912). = Resolvent  $R_\lambda$ 、立入ッ  
 タ構造が論ゼラレテキル。ソレト同様ナコトが抽象的ナ問題  
 =於テモ成立スル。即チ  $R_\lambda$  ハ  $\lambda$  ノ固有値  $\lambda = \lambda_0$  =於テ極デ  
 アル。ソノ証明法ハ *Lalesco* が  $R_\lambda$  ノ分解ヲ述ベテア  
 ル方法ト殆ド同様デアル。但シ *Lalesco* テハ *Fredholm*  
 ノ行列式ノ結果ヲ用ヒテキレカラ、極=ナルコトハ最初カラ  
 假定サレテキル。此処デハ *Lalesco* ノ方法ヲ用ヒテ逆=  
 極=ナルコトヲ証明シヨウ。然シ証明ノ最モ本質的ナ点ハ  
*Riesz* ノ定理ヲ應用スル所=アル。

$(E - \lambda A)(E - \lambda R_\lambda) = E$  ナル関係カラ  $R_\lambda$  = 関スル方  
 程式

$$(1) \quad R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$$

が得ラレル (*Lalesco*: 43 頁)。所ガ  $\lambda$  ノ固有値  $\lambda_0$  ハ  
 $R_\lambda$  ノ孤立特異点 ( $R_\lambda$  ハ一意函数) デアルカラ、 $\lambda = \lambda_0 + h$ ,  
 $\mu = \lambda_0 + h'$  トシテ  $R_\lambda, R_\mu$  テ  $h$  及ビ  $h'$  ノ *Laurent* 級数  
 = 展開シテ (1) ノ両辺ヲ比較スレバ、

$$R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(\lambda - \lambda_0)^n} + R'_\lambda \quad (R'_\lambda \text{ ハ } \lambda_0 \text{ デ正則})$$

トスルトキ、容易 =  $B_{p+q-1} = B_p B_q$  ヲ得ル。之レカラ

$$B_1^2 = B_1, \quad (\text{Idempotent})$$

$$B_{p+1} = B_2^p,$$

$$B_1 B_2 = B_2 B_1 = B_2.$$

ソコデ  $B_1$  が全空間  $\mathcal{R}$  ヲ  $\mathcal{L}_0$  = 移スモノトスレバ,  $\mathcal{L}_0$  ノ各点ハ  $B_1$  = ヨリ 不変 デアル。所ガ  $B_1$  ハ vollstetig ( $B_1 =$

$\frac{1}{2\pi i} \oint R_\lambda d\lambda$ ) デアルカラ,  $\mathcal{L}_0$  ノ有界ナ部分ハ緊ツテ (kom-

pakt) ナル。故ニ Riesz ノ定理ニヨリ  $\mathcal{L}_0$  ハ有限次元トナル。

次ニ  $B_2$  ハ  $\mathcal{R}$  ヲ  $\mathcal{L}_0$  内ニ移レ,  $\mathcal{L}_0$  ヲ  $\mathcal{L}_0$  内ニ移ス, デアルカラ

$$B_2 = C B_1, \quad B_{p+1} = C^p B_1.$$

但シ  $C$  ハ有限次元ノ空間  $\mathcal{L}_0$  内ノ一次変換デアル。故ニ

$$R_\lambda = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} \right\} B_1 + R'_\lambda.$$

所ガ  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}$  ガ  $|\lambda - \lambda_0| > 0$  デ収斂スルタメニハ

$C^k = 0$  ( $k$  ハ  $\mathcal{L}_0$  ノ次元) ナルヲ要スル。何トナレバ  $C$  ヲ標準型

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_k \end{pmatrix}$$

ニ改メテ見レバ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}}$  ハ  $|\lambda - \lambda_0| < \max |\alpha_j|$  デ

発散スルカラ,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ . 之カラ容易ニ  $C^k = 0$ .



故 =  $R_\lambda$  の高々  $n$  次ノ極デアル。

[5] 上ノ事カラ尚先ハ *Lauresco* ノ方法ヲ辿ッテ *Resolvent* ノ構造ヲ  $(E - \lambda A)g = f$  ノ解ナドノ関係ヲ論ズルコトが出来ルデアラウト思フ。カクテ *Fredholm* ノ行列式ヲ離レテ、可ナリ具体的ニ抽象的ニ積分方程式論が研究出来ルコトが明ラカトナツタ。此処デハ *Riesz* ノ研究が基礎的ニ役割ヲ演ズル。*Riesz* ノ論文ハ 28 頁モアルケレドモ丁寧ニ行キトミイタ証明ガソテアルカラ讀ミ易イ。シカモ 28 頁ノ内デ本論ニ必要ナノハ 10 頁乃至 20 頁位デアル。(必要ニ定理ハ *Hilfssatz 1*, *Hilfssatz 2*, (*Satz 1*), *Satz 2*, *Satz 3*, *Satz 4*, *Satz 6*, *Satz 7*, *Satz 12* ガケデアル)

次ニ尚 *Fredholm* ノ第三定理 (固有値ノ時 *nicht-homogen* ナ式ノ解ケル條件) ハ *Riesz* ノ抽象的ニ方法カラハ得ラレナイ。之レニツイテハ自カノ平素ノ不勉強ヲ告白スル次第デアルガ、三村氏が *Schauder* ノ論文 *Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen* (*Studia Math.* II, 1930, 183 頁 — 196 頁) = *konjugierte Operation* ノ概念ヲ (抽象的ニ) 定義シテ第三定理ガ証明シテアルコトヲ教ヘテ下サツタ。教ヘラレテ見ルト *überall dicht* = 讀ムベキ名論文ガアルノデ面喰ツテシマフ。自カノ貪弱ニ頭デ果シテドレダケ消化シ切レルカ、極少シツコノ學ビタイト思フ。廣大ニ大洋カラ離レテ、

岩間ノ滴水ヲノミ味ツテキヌ自余ヲ顧ミテ背汗ヲモヨホス次第デアル。

尚以上ノ如ク積分方程式ヲ抽象的ニ考察スル所以ハ只抽象化ノタメノ抽象化デハナイ。之レニヨツテ複雑ナ具体的問題ニ對スル理論上ノ見透シヲ得ルノデアル。例ヘバ

$$\varphi(x, y) = \alpha(x, y) \varphi(a, b) + \int_C \beta(x, y, s) \varphi(\xi(s), \eta(s)) ds \\ + \iint_G K(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y)$$

ニ於テ  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y, s)$ ,  $K(x, y, \xi, \eta)$ ,  $f(x, y)$  が與ヘラレタ函数  $\varphi(x, y)$  が未知函数トスルトキ, *Fredholm* ノ行列式ニヨル方法ハ不可能デハナイニセヨ, 余リニ複雑トナルデアラウ。之ニ對シテモ

$$\varphi(x, y) = A \varphi(x, y) + f(x, y)$$

トスレバ  $A$  ハ *vollstetig* + *linear operator* デアルカラ本論ニヨツテ理論上ノ見透シが得ラレル。(具体的解答が得ラレルノデハナイガ)